

基于 OFDM 循环前缀 LS 信道估计的构造方法

赵旺兴, 万群, 陈章鑫

(电子科技大学 电子工程学院, 四川 成都 611731)

摘要:提出了一种在正交频分复用系统中循环前缀频域序列(CPFS)用于最小二乘信道估计的子载波构造方法。该构造方法基于比较 CPFS 序列和梳状子载波序列的相关性, 可使 LS 信道估计的精度增加。该相关性利用凸优化的方法, 以子载波总体为变量及 LS 信道估计的最小均方误差(MSE)机制建立约束, 得到优化模型并通过拉格朗日方法求得最终构造解。仿真结果表明, 该构造方法得出子载波新解能使得 LS 估计模型下, CPFS 序列的估计精度更优。

关键词: 正交频分复用; 信道估计; 循环前缀频域序列; 凸优化; 拉格朗日方法; 梳状子载波序列

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)03-0175-08

Novel restructuring method for CP-based LS channel estimation in OFDM system

ZHAO Wang-xing, WAN Qun, CHEN Zhang-xin

(School of Electronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: A restructuring method for least square (LS) channel estimation using cyclic-prefix frequency sequences (CPFS) in orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) system was proposed. The restructuring method was based on the relationship of CPFS and comb-pilots which made a higher LS channel estimation precision. Specifically, the relationship used a convex optimization model, the model was set up using total sub carriers as variable and minimized mean square error (MSE) as the principle to generate constraint, where further the optimized restructuring result using Lagrange method was derived. Simulations verify that under the restructured total sub carriers CPFS can enhance the LS channel estimation precision.

Key words: orthogonal frequency division multiplexing; channel estimation; cyclic-prefix frequency sequences; convex optimization; Lagrange method; comb sub-carriers sequences

1 引言

正交频分复用技术被认为是下一代 4G 或 B3G 无线通信系统中最关键的技术之一。该项技术的优势在于它可将一段固定频谱分隔成相互正交的子频带, 提高了频谱资源利用率。同时, 子频带可将小尺度衰落分割成平坦衰落, 从而有效对抗多径衰落如频率选择性信道影响。结合在接收端通过信道估计和均衡, 相对于单载波调制系统具有更好的传输效率。

在系统应用中, 欧洲的 DVB, WiMAX 系统采

用在频域中等间隔地插入已知导频并在接收端进行插值方法跟踪快变信道的频域信息的方式, 适用于快衰落信道估计^[1]。中国数字地面广播系统(DTMB)采用了一种在时域帧中插入具有不相关特征的 PN 序列的方式可分离出时域信道信息, 已有一部分用于系统的方案中。除此之外, 国内外开展了大量的理论研究工作。通常与接收端均衡联合起来研究。如在基于判决反馈的均衡方法中, 将信道参数处理成滤波器抽头, 用自适应的方法如最小均方法(LMS)不断训练逼近信道真实值^[2]。文献

收稿日期: 2011-12-02; 修回日期: 2012-12-15

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(ZYGX2011J016)

Foundation Item: The Fundamental Research Funds for the Central Universities (ZYGX2011J016)

[3]利用卡尔曼滤波法也属于自适应理论范畴。还有一类盲信道估计方法中,不需要借助辅助信息,直接将接收符号做数学处理,如将其变换到高阶矩阵,用特征值分解或奇异值分解再做特征提取,可以恢复出信道信息^[4]。由于矩阵理论的成熟,文献[5]直接将 OFDM 简化为矩阵扰动模型进行分析求解。

循环前缀(CP)在抑制符号及子载波间干扰中发挥着重要的作用,一般不直接用于估计信道。尽管如此,文献[6]建立了信道估计凸优化模型。文献[7]直接推导了循环前缀与时域信道表达式的关系。文献[8]系统而全面地总结了循环前缀的完整性对信道估计及接收端均衡恢复的影响。这些方法都将循环前缀与信道估计建立了关系,不乏巧妙性。然而这些研究都是在时域上进行研究挖掘关系,很少有文献研究循环前缀的频域特性,也即将 CP 做相应长度的 FFT 变换成频域序列在频域上研究其特性。事实上,因为 CP 是一个 OFDM 最后部分的复制,它的频域序列必然携带了子载波信息。换言之,可以将其作为一种特殊的导频,并且这种导频不同于传统子载波导频对子载波信息进行局部抽取,它与子载波之间具有特殊的线性映射关系,具体见第 2 节的推导。

已经有文献研究表明,与传统类似的直接占有子载波的导频序列相比,在相同的最小二乘估计准则下,CPFS 法的估计均方误差(MSE)与后者具有不确定的关系。文献[9]给出了一个在 LS 估计框架^[10]下,只要选择的子载波导频序列足够多,其信道估计的 MSE 一定要好于 CPFS 序列。那么,当选择子载波个数只能为 p (CPFS 点数) 点时,上述 2 种序列进行信道估计的大小关系是值得研究的内容。

而大家熟知的在相同子载波导频选取下,有一种等间隔的子载波导频序列具有最优性,也称梳状子载波导频序列,附录 A 给出了证明。那么当同时选取 p 点 CPFS 与之比较时,LS 估计性能如何?通过推导它们的特征表达式,附录 B 将两者进行了做差比较,结果证明是不定的,取决于子载波的不同情况。

在这样的背景下,本文提出了一种构造子载波发送序列的方法,在新的构造子载波下,可使得上述 2 种特征序列不定的关系明朗化,利用 LS 信道估计的最小化 MSE 机制迫使前者优于后者,从而进一步提升了 LS 信道估计方法的估计精度,与之对应发现了这种特殊的 CPFS 序列。

本文余下的部分组织如下:首先推导 LS 信道

估计器的 MSE,论述 MSE 取决于导频序列的能量,作为依据,推导了等间隔子载波序列与子载波发送序列间的关系并比较了两者的能量关系。在构造发送序列部分中,通过以上机制建立约束模型,用两步拉格朗日解析法解得了最优解,保证了 CPFS 的最优性;还对约束模型的优化进行了可行性范围分析,指出其可行性。最后用仿真验证了构造理论和约束模型的正确性。需要说明的是, A 代表向量卷积, $*$ 代表向量之间或向量与标量间的乘积, H 表示矩阵共轭转置。

2 LS 信道估计器

2.1 点到点的 OFDM 信道传输模型

点到点的 OFDM 信道传输模型可表示为

$$y = s \hat{A} h + n \tag{1}$$

其中, y 代表接收端符号, s 发送端符号, h 时域信道, n 是加性噪声。当传输过程连续时,根据傅里叶变换理论,在频域式(1)等价于

$$Y = S * H + N \tag{2}$$

2.2 LS 信道估计的最小化 MSE 原理

在 OFDM 系统中,结合式(2),频域 LS 准则的信道估计表达式可简单表示为

$$\hat{H}_{ls} = \frac{Y_{pilot}}{X_{pilot}} \tag{3}$$

其中,“ $-$ ”表示 2 个向量除法,是将接收端的频域符号与发送端对应符号相除, \hat{H}_{ls} 表征 LS 信道估计的频域信息。结合式(2),推导该估计方法 MSE 如下。

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{ls} &= E \left\| \hat{H}_{ls} - H \right\|_2^2 \\ &= E \left\| \frac{Y_{pilot}}{X_{pilot}} - H \right\|_2^2 = E \left\| \frac{S * H + N}{X_{pilot}} - H \right\|_2^2 \\ &= E \left\| \frac{S * H}{X_{pilot}} + \frac{N}{X_{pilot}} - H \right\|_2^2 = E \left\| \frac{S * H}{X_{pilot}} - H + \frac{N}{X_{pilot}} \right\|_2^2 \\ &= E \left\| \frac{N}{X_{pilot}} \right\|_2^2 \end{aligned} \tag{4}$$

其中, $\left| N_{pilot} \right|_2^2$ 表示导频处噪声的频谱能量,因时域噪声符合高斯分布,具有随机性,所以,该值逼近

$F_i = F_{i-1}f, i = 1, L, Q$, 于是结合式(10)和式(12)得

$$F = F_p W \begin{bmatrix} I_p, f, L, f^{Q-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

因此,

$$X_Q = F_p W \begin{bmatrix} I_p, f, L, f^{Q-1} \end{bmatrix} x_M \quad (14)$$

这样就得到了等间隔子载波导频序列与子载波发送序列的特征关系式。同时,直观地,循环前缀频域序列 CPFS 又可表示为

$$X_{CP} = F_p f_{Q-1} = F_p [0, 0, L, I] x_M \quad (15)$$

在附录 B 中比较了 X_Q 和 X_{CP} 在相同子载波下序列的能量关系,即 LS 信道估计器的 MSE 大小关系,可以证明关系是不定的。然而研究 CPFS 的目的是为了以之作为载体优化 LS 信道估计。以下从凸优化的角度,以子载波发送序列为变量,建立优化模型,解得最优的子载波发送序列,使得 CPFS 能够最优化。同时,还对优化模型进行了可行域分析,论述其可行性。

4 新的发送序列构造

4.1 基本约束模型搭建

记新的发送序列为 X ,结合式(5)和式(14),新的发送序列 X 使得 2 种特征序列尽量靠近,于是

$$X_{op} = \arg \min_X \left(\|F_p^{-1} \bar{F}_{p \cdot N} X - Wf F_N^{-1} X\| = \|A * X\| \right) \quad (16)$$

其中, $\| \cdot \|$ 表示向量二范数, $f = \begin{bmatrix} 1, L, f^{Q-1} \end{bmatrix}$,这里为推导方便,考虑了其时域形式。

同时为了使误码率不至于太大,整个发送序列与原发送序列间应尽量保持一致,即

$$\|X - X_N\| \leq \epsilon \quad (17)$$

其中, ϵ 是一个很小的正数。

最后,为了使得 CPFS 比等间隔子载波序列的 MSE 小,结合式(4)和式(5)得

$$\begin{aligned} \|F_p^{-1} \bar{F}_{p \cdot N} X\| &= \|M * X\| \\ \frac{\|a F_N^{-1} X\|}{\|a F_N^{-1} X_N\|} * \|Wf F_N^{-1} X_N\| &= d * \|N * X\| \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $N = a F_N^{-1}$, a 将不带循环前缀的时域 OFDM 符号映射成加循环前缀的时域发射符号。

$\|a F_N^{-1} X\| / \|a F_N^{-1} X_N\|$ 表示构造发送序列前后时

域发射符号的能量(即噪声的能量)大小,因为当信噪比一定时,两者的比值相等。 $\|Wf F_N^{-1} X_N\|$ 表示原发送序列下的等间隔子载波序列时域能量, $\|F_p^{-1} \bar{F}_{p \cdot N} X\|$ 表示新子载波发送序列下的 CP 能量。

结合式(16)~式(18),建立约束模型为

$$\begin{cases} \min_X \|A * X\| \\ \text{st. } \|X - X_N\| \leq \epsilon \\ \|M * X\| \leq d * \|N * X\| \end{cases} \quad (19)$$

为了解得式(19)的结果,利用拉格朗日解析法求解。

$$\begin{aligned} f(X, \lambda, \mu) &= \|A * X\|^2 + \lambda (\|X - X_N\|^2 - \epsilon^2) + \\ &\mu (\|M * X\|^2 - d^2 \|N * X\|^2 - e^2) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, λ, μ 是拉格朗日约束式, e 是增量因子,由式(19)中第 2 个不等式引入。附录 C 是利用求梯度和求导的方法巧妙解出新的解 X 必然包含在

$$X^H * X_N - X^H * X = X^H * \frac{\lambda}{e} * z * X \quad (21)$$

其中, λ 和 e 是增量因子和确定变量。 z 是一个特殊的表达式, $z = (M^H * M - d^2 * N^H * N)^{\frac{1}{2}}$, d 由式(18)定义。

4.2 拉格朗日重复解析

由式(21)可知,满足基本约束模型的 X 必然被包含在式(21)内,但是其中存在着若干解,同时为了进一步优化达到目的,有必要对结果进一步优化,与附录 C 一样。采用拉格朗日法进一步优化。

首先,确立一个更直观更强的目标函数,该目标函数使得构造前后 2 种特征序列进一步靠近。

$$X_{op}^{\zeta} = \arg \min_X \left(\|F_p^{-1} \bar{F}_{p \cdot N} X - Wf F_N^{-1} X_N\| = \|A^{\zeta} * X - b\| \right) \quad (22)$$

那么,再次构造拉格朗日解析式为

$$g(X) = \|A^{\zeta} * X - b\|^2 + s \left(X^H * X_N - X^H * X - X^H * \frac{\lambda}{e} * z * X \right) \quad (23)$$

对 X 求梯度解得

$$X_{op}^{\zeta} = \frac{s * I + s * \frac{\lambda}{e} * z + A^{\zeta H} * A^{\zeta} * X_N + A^{\zeta H} * b}{2s} \quad (24)$$

其中, s 是拉格朗日因子。

$$s = \frac{2 * X^H * A^{\zeta H} * A^{\zeta} * X - 2 * X^H * A^{\zeta H} * b}{X^H * X_N} \quad (25)$$

到这里，分别求出了 x_{op}^c 和 s 的表达式，根据计算机迭代逼近的方法不难求出模型的最优解 \hat{x}_{op}^c 。因拉格朗日迭代法一定收敛，可保证算法不溢出，此处省略。

5 构造可行性分析

第 4 节最后通过迭代求得最优解，为了验证以上约束优化模型具有合理性及可行性，在此继续对构造模型进行可行性分析，通过该分析从理论上可以明确构造思想的正确性。

总结起来，约束模型仅仅与 2 个约束式(式(17)和式(18))及 2 个目标函数式(式(16)和式(22))有关，并且由式(21)可知，约束式(16)与最终结果无关，因为该等式中并不包含 A 。因此，只需要考虑约束式(17)和式(18)及目标函数式(22)所组成的优化模型。

首先，重新抽象出约束模型，式(18)等价于

$$\cup \frac{\|\beta * x\|}{\|a * x\|} \leq \frac{\|? * x_N\|}{\|a * x_N\|}, \beta * F_N^{-1} = F_p^{-1} * \bar{F}_{p * N}, \quad ? = W * f, x = F_N^{-1} * X \quad (26)$$

β 将时域 OFDM 符号映射成循环前缀， a 将时域 OFDM 符号映射为该符号带上循环前缀， $?$ 将时域 OFDM 符号映射为等间隔训练序列时域符号。

同时目标函数式(22)可简记为

$$\cup x_{op}^c = \arg \min_x (\|\beta * x - ? * x_N\|), \quad x = F_N^{-1} * X, x_N = F_N^{-1} * X_N \quad (27)$$

于是约束式可统一在以下框架中

$$x_{op}^c = \arg \min_x (\|\beta * x - ? * x_N\|) \quad (28a)$$

$$\frac{\|\beta * x\|}{\|a * x\|} \leq \frac{\|? * x_N\|}{\|a * x_N\|} + e^2 \quad (28b)$$

$$\|x - x_N\| \leq ? \quad (28c)$$

在该框架下，核心是分析式(28b)的可行性。

定义 $f_1(x) = \frac{\|\beta * x\|}{\|a * x\|}, f_2(x) = \frac{\|? * x\|}{\|a * x\|}$ ，只需要证

明存在这样的 $X, f_1(x) \leq f_2(x_N)$ ，因为

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta \\ \mathbf{0}_{(N-p) * p} \end{bmatrix}, I_{p * p} = \begin{bmatrix} I_{p * p} \\ \mathbf{0}_{(N-p) * p} \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{0}_{N * N} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\beta^H * \beta = \begin{bmatrix} \beta^H * \beta & \mathbf{0}_{(N-p) * p} \\ \mathbf{0}_{p * (N-p)} & I_{p * p} \end{bmatrix}$$

$$a^H * a = \begin{bmatrix} I_{(N-p) * (N-p)} & \mathbf{0}_{(N-p) * p} \\ \mathbf{0}_{p * (N-p)} & 2 * I_{p * p} \end{bmatrix}$$

$$\sup a^H * a = \beta^H * \beta + I_{N * N} \quad (30)$$

根据矩阵理论， $f_1(x)$ 的范围为

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{\|\beta * x\|^2}{\|a * x\|^2}} = \sqrt{\frac{x^H * \beta^H * \beta * x}{x^H * a^H * a * x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{x^H * a^H * a * x}{x^H * x}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_{\min}(a^H * a)}} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(a^H * a)}} = \sqrt{2} \quad (31)$$

这时再构造比较函数

$$g_1(x) = x^H * \beta^H * \beta * x - M * x^H * a^H * a * x, M \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad (32)$$

事实上，结合式(31)，当 M 属于以上范围时，矩阵 $\beta^H * \beta - M * a^H * a$ 是不定的。即存在 x_0 ，使得 $g_1(x_0) < 0$ 。

接下来再计算 $f_2(x_N)$ 的范围，由于关系的不明朗，只能给定一个上界和下界。

$$0 = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(?^H * ?)}{\lambda_{\max}(a^H * a)}} \leq f_2(x_N) = \sqrt{\frac{\|? * x_N\|^2}{\|a * x_N\|^2}} = \sqrt{\frac{x_N^H * ?^H * ? * x_N}{x_N^H * a^H * a * x_N}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(?^H * ?)}{\lambda_{\min}(a^H * a)}} = 1 \quad (33)$$

其中，

$$?^H * ? = (Wf)^H Wf = f^H f = \begin{bmatrix} f^0 & & & & \\ & f^{-1} & & & \\ & & f^0 & & \\ & & & f^1 & \\ & & & & f^{Q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^0 & & & & \\ f^{-1} & & & & \\ & f^0 & & & \\ & & f^1 & & \\ f^{1-Q} & & & f^{Q-1} & \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} I_{p * p} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

从式(34)得出如下结论。

当 $0 \leq f_2(x_N) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cup f_2(x_N) = M \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时，总能够从 $f_1(x)$ 找到 x 使得 $f_1(x) \leq f_2(x_N)$ 成立，从

而式(28b)可行。但是当 x_N 使得 $f_2^2(x_N) = M \hat{\Gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 从式(32)必然得 $g_1(x) < 0$, 这时式(28b)不可行。

事实上, 这种情况等价于 e 很大时, 式(28b)不可能成立。然而, 此时再看式(28a)和式(28c)可知, 这并不影响优化结果。

6 仿真

仿真条件如下。

比特映射: 16-QAM。

子载波个数: 256。

是否插入导频: 否。

循环前缀长度: $P=16$ 。

信道估计插值方式: DFT。

等间隔宽度: $Q=16$ 。

信道径数: $H=16$ 。

最大信噪比: 40dB。

参数设置: γ , e 可调。

6.1 可调参数分析

为了验证在可行性分析中的准确性, 分 2 步对仿真实验进行验证。通过可行性分析知道, e 将影响可行性是否成立。当 γ 固定时, 首先使得 $\frac{\gamma}{e} = 1$ 作为第 1 种情况。然后, 在第 2 步中设立 e 很大, 即 $\frac{\gamma}{e}$ 足够小, 逼近于 0, 将其作为第 2 种情形。

6.2 信道估计 MSE 分析

当 $\gamma = 0.01, e = 0.01$ 时, 2 种特征序列构造前后 MSE 结果如图 2 所示。

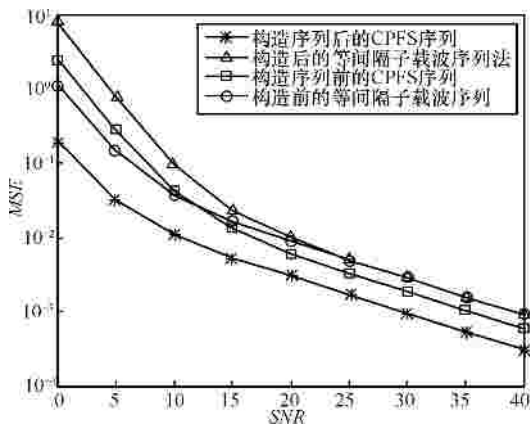


图 2 基本条件下的 2 种特征序列构造前后 MSE 比较

当 $\gamma = 0.0001, e = 0.1$ 时, 2 种特征序列构造前后

MSE 结果如图 3 所示。

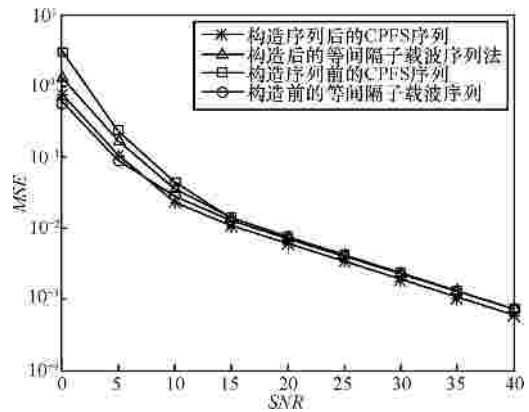


图 3 拓展条件下 2 种特征序列构造前后 MSE 比较

以上仿真结果表明, 可行性分析是正确无误的, 从而本文的构造理论达到了预期的目的。不仅提高了 LS 导频信道估计的精度, 也利用了循环前缀资源, 提高了系统效率。

7 结束语

本文在 LS 信道估计框架下, 提出了一种新的基于循环前缀频域序列的信道估计方法, 论证了其与传统最优性的等间隔子载波序列法比较的均方差大小关系。设计了一种构造子载波发送序列的方法, 该构造方法的成功使得循环前缀 LS 估计方法超越了传统的具有最优性的等间隔训练序列法, 达到了优化的目的。拉格朗日解析法的使用巧妙地得到了优化结果, 可行性分析对优化模型进行了严格的论述, 最后用仿真验证了其正确性。该设计的成功预示着, 在新的 OFDM 框架下, 可以充分应用循环前缀资源, 同时还能够得到更准确的信道估计, 从而提高了系统利用的效率。虽然构造的计算复杂度可能很高, 但是作为一种理论上改进的方法, 本构造理论具有很强的理论性和创新性, 具有借鉴的价值和研究的意义。

附录 A 等间隔训练序列最优性证明

设导频从 L 个子载波中任选 p 个组成导频选取下标 $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$, 那么,

$$X_p = (X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_p})^T = \frac{1}{\sqrt{L}} * P_{p \times L} * x_L$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} * \begin{pmatrix} 1 & e^{j \frac{2p \cdot k_1 + 1}{L}} & L & e^{j \frac{2p \cdot k_1 + (L-1)}{L}} \\ 1 & e^{j \frac{2p \cdot k_2 + 1}{L}} & L & e^{j \frac{2p \cdot k_2 + (L-1)}{L}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j \frac{2p \cdot k_p + 1}{L}} & L & e^{j \frac{2p \cdot k_p + (L-1)}{L}} \end{pmatrix} * x_L$$

于是，式(13)中的 $|X_p|^2$ 可表示为

$$|X_p|^2 = \mathbf{X}_p^H \mathbf{X}_p = \frac{1}{L} * \mathbf{x}_L^H \mathbf{P}_{p \times L}^H \mathbf{P}_{p \times L} \mathbf{x}_L = \frac{1}{L} * \mathbf{x}_L^H \mathbf{Q}_{L \times L} \mathbf{x}_L$$

不论导频选择的哪些子载波，由式 (16)可知，决定 LS 通用估计器 MSE 大小的因子 $|X_p|^2$ 将由矩阵 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 决定，因为 \mathbf{x}_L 是时域 OFDM 符号，相对而言是固定的。

$$\mathbf{Q}_{L \times L} = \mathbf{P}_{p \times L}^H \mathbf{P}_{p \times L}, \mathbf{Q}_{L \times L} = \mathbf{Q}_{L \times L}^H, \text{diag}(\mathbf{Q}_{L \times L}) = p$$

所以矩阵 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 是哈密特对称矩阵，对角线上的元素均为 p ，并且 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 可由 $\mathbf{P}_{p \times L}$ 表出，而后者秩不大于 p ，矩阵 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 的秩不大于 p 。

考虑将 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 做特征值分解如下

$$\mathbf{Q}_{L \times L} = \mathbf{q}_{L \times L} \begin{pmatrix} ?_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{M} & 0 & ?_s & \text{M} \\ 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_{L \times L}^H = \mathbf{q}_{L \times L} ? \mathbf{q}_{L \times L}^H, s = p$$

其中， $\mathbf{q}_{L \times L}$ 是酉矩阵，因为 $\mathbf{P}_{p \times L}$ 是复数矩阵，所以 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 的特征值必然都是复数，又因为矩阵的对角线之和等于矩阵的特征值之和，以矩阵的谱范数来定义矩阵大小，所以得到如下约束关系。

$$\begin{cases} \max_i (\|\mathbf{Q}_{L \times L}\|_2 = \max(|?_i|^2)) \\ \text{st.} \sum_{i=1}^s ?_i = L * p \end{cases}$$

容易发现，当 $s=1$ 时， $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 矩阵只有一个特征值或者其余特征值几乎可以忽略不计，所有的能量都倾斜于该最大的特征值，可使得谱范数最大化。这时，矩阵 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 的秩理论上为 1，或者每行的差距不大。又由于 $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 是哈密特矩阵且秩为 1，并且其对角线上的元素均为 p ，因此一个充要条件是： $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 的所有元素都接近 p 。

根据其定义， $\mathbf{Q}_{L \times L}$ 中的第 i 行及第 k 列的元素表达式为

$$\mathbf{Q}_{L \times L}(i, k) = \sum_{m=1}^p e^{-j \frac{2pk_m(i-1)}{L}} * e^{j \frac{2pk_m(k-1)}{L}} = \sum_{m=1}^p e^{j \frac{2pk_m(k-i)}{L}}$$

根据以上分析得

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{L \times L}(i, k) &\approx p \Leftrightarrow \sum_{m=1}^p e^{j \frac{2pk_m(k-i)}{L}} \approx p, i, k \in \{1, 2, L, L\} \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=1}^p e^{j \frac{2pk_m l}{L}} \approx p, \sum_{m=1}^p e^{-j \frac{2pk_m l}{L}} \approx p, l = 0, 1, 2, L, L-1 \end{aligned}$$

利用欧拉公式，进一步有

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^p e^{j \frac{2pk_m l}{L}} + \sum_{m=1}^p e^{-j \frac{2pk_m l}{L}} \approx 2 * p \\ \Leftrightarrow \sum_{m=1}^p \cos\left(\frac{2pk_m l}{L}\right) \approx p \\ \sum_{m=1}^p e^{j \frac{2pk_m l}{L}} - \sum_{m=1}^p e^{-j \frac{2pk_m l}{L}} \approx 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{m=1}^p \sin\left(\frac{2pk_m l}{L}\right) \approx 0 \end{cases}, l = 0, 1, 2, L, L-1$$

要同时满足式 (21) 中的条件，由于 $k_m \in \{1, 2, L, L\}$ ， $m=1, L, p$ ，且 $l=0, 1, 2, \dots, L-1$ 取值都要满足，于是，需要设计一种最优的 k_m 使得如下问题优化，

$$\hat{k}_m = \arg \min_{k_m} \left(\sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{m=1}^p \cos\left(\frac{2pk_m l}{L}\right) - p \right)^2 + \sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{m=1}^p \sin\left(\frac{2pk_m l}{L}\right) \right)^2 \right)$$

将其看作 k_m 的函数，求偏导令其等于 0，整理得

$$\sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=1}^p \sin\left(\frac{2pk_m l}{L}\right) = 0$$

满足上式的 k_m 只有限定其是离散均匀分布，不妨设为

$$k_m = k_0 + \frac{L}{p}(m-1), k_0 < \frac{L}{p}$$

这时导频选取为等间隔的。证明完成。

附录 B 2 种特征序列的能量大小比较

考虑做如下变形，

$$\begin{aligned} |X_Q|^2 - |X_{CP}|^2 &= (\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_{CP})^H (\mathbf{X}_Q + \mathbf{X}_{CP}) - (\mathbf{X}_Q^H \mathbf{X}_{CP} - \mathbf{X}_{CP}^H \mathbf{X}_Q) \\ &\text{结合 } f \text{ 和 } W \text{ 的性质, } f^H = f^{-1}, W^H = W^{-1}, f^{Q-i} = W_M^{mP(Q-i)} \\ &= W_M^{mP(-i)} = f^{-i} \end{aligned}$$

分别计算得

$$\begin{aligned} &(\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_{CP})^H * (\mathbf{X}_Q + \mathbf{X}_{CP}) \\ &= \mathbf{x}_M^H * [\mathbf{I}, f, L, f^{Q-1} - W^{-1}]^H * W^H * F_p^H * F_p * W * [\mathbf{I}, f, L, f^{Q-1} + W^{-1}] * \\ &\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_M^H * [\mathbf{I}, f, L, f^{Q-1} - W^{-1}]^H * P * [\mathbf{I}, f, L, f^{Q-1} + W^{-1}] * \mathbf{x}_M \\ &= P * \mathbf{x}_M^H * [\mathbf{I}, f^{-1}, L, f^{1-Q} - W]^T * [\mathbf{I}, f, L, f^{Q-1} + W^{-1}] * \mathbf{x}_M \\ &= P * \mathbf{x}_M^H * \mathbf{A} * \mathbf{x}_M \end{aligned}$$

同时，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_Q^H * \mathbf{X}_{CP} &= \mathbf{x}_M^H * [\mathbf{I}, f, L, f^{Q-1}]^H * W^H * F_p^H * F_p * [0, 0, L, \mathbf{I}] * \\ \mathbf{x}_M &= \mathbf{x}_M^H * [\mathbf{I}, f^{-1}, L, f^{1-Q}]^T * W^{-1} * P * [0, 0, L, \mathbf{I}] * \mathbf{x}_M \\ &= P * \mathbf{x}_M^H * \mathbf{B} * \mathbf{x}_M \end{aligned}$$

那么，

$$|X_Q|^2 - |X_{CP}|^2 = P * \mathbf{x}_M^H * (\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{B}^H) * \mathbf{x}_M = P * \mathbf{x}_M^H * \mathbf{C} * \mathbf{x}_M。$$

具体地，

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & f^{-1} & \mathbf{L} & f^{\varrho-1} + \mathbf{W}^{-1} \\ f^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{L} & f^{\varrho-2} + f^{-1}\mathbf{W}^{-1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ f^{1-\varrho} - \mathbf{W} & f^{2-\varrho} - \mathbf{W}f & \mathbf{L} & f\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}f^{-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{W}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & f^{-1}\mathbf{W}^{-1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & f^{1-\varrho}\mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = A - B + B^H = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & f & \mathbf{L} & f^{\varrho-1} \\ f^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{L} & f^{\varrho-2} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ f^{1-\varrho} & f^{2-\varrho} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

能量决定于 C ，看是否是正定或负定。首先可将 C 等价变形为

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & f & \mathbf{L} & f^{\varrho-1} \\ f^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{L} & f^{\varrho-2} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ f^{1-\varrho} & f^{2-\varrho} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I} & f & \mathbf{L} & f^{\varrho-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = D$$

C 和 D 等价，它们有共同的特征值，注意到 D 含有正和负的特征值，是不定的，从而 C 是不定矩阵，意味着发送序列的不同可使得能量差可正可负，即 2 种特征序列的能量大小关系不定。从而 2 种序列 LS 信道估计的 MSE 也不定，它在相同的子载波下决定于特征序列的能量。完毕。

附录 C 子载波最优解的关系式推导

对式(20)求梯度，并分别对 ϱ 和 μ 求导得

$$A^H A X + \varrho X - \varrho X_N + \mu M^H M X - \mu d^2 N^H N X = 0 \quad (35a)$$

$$\|X - X_N\|^2 = \varrho^2 \quad (35b)$$

$$\|M X\|^2 = d^2 \|N X\|^2 + e^2 \quad (35c)$$

以下是具体求解过程。

首先，式(35a)可以化为

$$X_N - X = \frac{A^H A + \mu M^H M - \mu d^2 N^H N}{\varrho} X = B X$$

上式代入式(35b)得

$$X^H B^H B X = \varrho^2$$

将式(35c)展开为

$$X^H (M^H M - d^2 N^H N) X = e^2$$

比较得

$$B^H B = \frac{\varrho^2}{e^2} (M^H M - d^2 N^H N) \quad (36)$$

$N = a F_N^{-1}$ 是 $(N+P) \times N$ 的秩为 N ，所以 $M^H M - d^2 N^H N$ 必然是秩为 N 的满秩矩阵，因此，必然存在 z 满足 $z = (M^H M - d^2 N^H N)^{\frac{1}{2}}$ ，并且 z 也是一个秩为 N 的矩阵。

因为 $B^H = B$ 也是一个共轭对称矩阵，所以式(36)等价于

$$B^2 = \left(\frac{\varrho}{e} z \right)^2$$

又因为 $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ 也是满秩矩阵，所以一般情况下

$$B = \frac{\varrho}{e} z$$

到这里，在 $\frac{A^H A + \mu M^H M - \mu d^2 N^H N}{\varrho} = B$ 左乘 X^H 且

右乘 X

$$X^H A^H A X + \mu e^2 = \varrho X^H \frac{\varrho}{e} z X \quad (37)$$

同时，由式(35a)左乘 X^H 可以解出

$$\varrho = \frac{X^H A^H A X + \mu e^2}{X^H X_N - X^H X} \quad (38)$$

比较式(37)和式(38)得到重要的等式

$$X^H X_N - X^H X = X^H \frac{\varrho}{e} z X \quad (39)$$

推导完毕。

参考文献：

- [1] WANG L G, LIU H S, ZHU L X. Design methods of channel estimation device based on OFDM system[J]. Shipboard Electronic Counter measure, 2008, 31(4):101-104.
- [2] SUN G C, ZHOU C Z, SUN B. LMS adaptive channel estimation algorithm and simulation[J]. Computer Applications, 2005,25(6):1468-1470.
- [3] HE W H, LEE Y M. Low-complexity kalman channel estimator structures for OFDM systems with and without virtual carriers[A]. Proc of Communication society[C]. IEEE Press, 2004.2447-2451.
- [4] KATHRYN K. Channel Estimation of Frequency Selective Channels for MIMO-OFDM[D]. Alberta : University of Calgary , 2005.
- [5] FENG W. Signal-Perturbation-Free Semi-Blind Channel Estimation for MIMO-OFDM Systems[D]. Montreal: Concordia University, 2009.

(下转第 191 页)

- 97-100.
MI Q Q. University Teaching Principles[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1989. 97-100.
- [8] 徐耀玲, 唐五湘, 吴秉坚. 科技评估指标体系设计的原则及其应用研究[J]. 中国软科学, 2010, 30(2):48-51.
XU Y L, TANG W X, WU B J. Design principle and application of S&T evaluation index system[J]. China Soft Science, 2010, 30(2):48-51.
- [9] 杨宏宇, 谢丽霞, 朱丹. 漏洞严重性的灰色层次分析评估模型[J]. 电子科技大学学报, 2010, 39(5):778-782.
YANG H Y, XIE L X, ZHU D. A vulnerability severity grey hierarchy analytic evaluation model[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2010, 39(5):778-782.
- [10] PANG J, PENG X. Trustworthy Web service security risk assessment research[A]. Proc of the 2009 International Forum on Information Technology and Applications[C]. Piscataway, USA, 2009. 417-420.
- [11] 周晓洁. 基于模糊综合评价法的船舶热源系统优选研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2010.
ZHOU X J. Study on The Selection of Marine Heat Source System Based on Fuzzy Comprehensive Evaluation Method[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2010.
- [12] 加尔布雷斯. Web 服务安全性高级编程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. 400-444.
GALBRAITH B. Professional Web Services Security[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.400-444.
- [13] FLY R. Detecting fraud on websites[J]. IEEE Security & Privacy, 2011, 9(6):80-85.
- [14] ANTUNES N, VIEIRA M. Defending against Web application vulnerabilities[J]. IEEE Computer, 2012, 45(2):66-72.
- [15] 陈伟琳. 协议安全测试理论和方法的研究[D]. 北京: 中国科学技术大学, 2008.
CHEN W L. Research on Testing Theory and Methods of Protocol Security[D]. Beijing: University of Science and Technology of China,

2008.
[16] 赵德明. 多维度 Web 服务安全性评估[D]. 北京: 中国石油大学, 2011.
ZHAO D M. Multiple Dimension Security Assessment of Web Service[D]. Beijing: China University of Petroleum, 2011.

作者简介:



杨宏宇(1969-), 男, 吉林长春人, 中国民航大学教授、博士生导师, 主要研究方向为网络信息安全。



于巾博(1987-), 女, 内蒙古赤峰人, 中国民航大学硕士生, 主要研究方向为网络信息安全。



谢丽霞(1974-), 女, 重庆人, 中国民航大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为网络信息安全。

(上接第 182 页)

- [6] KOIKE-AKINO T, MOLISCH A F, DUAN C J, *et al*. Capacity, MSE and secrecy analysis of linear block precoding for distributed antenna systems in multi-user frequency selective fading channels[J]. IEEE Trans on Communications, 2011, 59(3):888-900.
- [7] STEGER C B. Wireless Downlink Schemes in a Class of Frequency Selective Channels with Uncertain Channel State Information[D]. Houston: Rice University, 2004.
- [8] SU B. Blind Channel Estimation Using Redundant Precoding: New Algorithms, Analysis and Theory[D]. California: Institute of Technology Pasadena, 2008.
- [9] ZHAO W X, FANG F. A diverse proof of OFDM channel estimation comparing CP-sequences and training-sequences methods under LS frame[A]. Proc of Information Theory and Artificial Intelligence Computing[C]. IEEE Press, 2011.
- [10] GÜREL I. Channel Estimation for OFDM Systems[D]. Middle East Technical University, 2005.

作者简介:



赵旺兴(1986-), 男, 湖南邵东人, 电子科技大学硕士生, 主要研究方向为 OFDM 系统传输优化的信号处理。

万群(1971-), 男, 江西南昌人, 电子科技大学教授、博士生导师, 主要研究方向为阵列信号处理、无线定位及波束形成信号处理。

陈章鑫(1979-), 男, 四川乐山人, 电子科技大学副教授, 主要研究方向为无源定位理论和算法、传感器网络节点定位和分布式系统。